数理解析研究所講究録
123巻 1971年 11-19

グラフ $G(X, \Gamma)$ の概念と連結行列 A

慶応義塾大学　竹中淑子

有向グラフ $G(X, \Gamma)$ のいろいろの定義を $G(X, \Gamma)$ に対応する連結行列 A を用いて系統的に表現すること、この表現を用いて Hamiltonian circuit の存在に関する定理を求めること、この一つの応用としてチェスのナイトの旅に関する Euler 問題の解の存在を示めすことが目的である。なおこれらは 参考文献[2],[3] によるものである。

§1. 連結行列 A を用いての表現

有向グラフ $G(X, \Gamma)$, $|X| = n$ において 連結行列 $A = (a_{ij})$ は

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : (x_i, x_j) \in U \\ 0 & : (x_i, x_j) \notin U \end{cases} \qquad \cdots (1)$$

で与えられる。ここに U は $G(X, \Gamma)$ の arc の全体である。

Aの行ベクトルを $a_1, a_2, \cdots a_n$, 列ベクトルを $a^1, a^2, \cdots a^n$ で表わす。演算はすべて Boolean addition $+$ と Boolean multiplication $\times$ にておこなうこととし この A に対し $A^{(2)}, A^{(3)}, \cdots\cdots$ を定義する。I, E はそれぞれ すべての元が 1 の n 次ベクトル, $n \times n$ 行列とし

$$A^{\circ} = \sum_{i=1}^{n} A^{(i)}, \qquad |A| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad |a_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad \cdots (2)$$

とおく。$(a_1, a_2, \cdots a_n)$ の置換を σ で表わし そのときの行列を $A(\sigma)$ とする。$X = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ に対し $J_X = \{1, 2, \cdots n\}$ と表わす。

(i) 型, arc, path, 基本的数に関するもの。

	graph (X, Γ), $\lvert X \rvert = n$	incidence matrix A
1	simple	$\exists \sigma ;\ A(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	complete	$A + A^{T} = E$
3.	connected	$\sum_{i=1}^{n} A^{(i)} = E$
4	transitive	$\exists k > 0 ;\ a_{ij}^{(k)} = 1 \Rightarrow a_{ij} = 1$
5	$\begin{cases} \exists \text{ arc } (x_i, x_j) \\ \text{otherwise} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \exists \text{ path } (x_i, \cdots x_j) \text{ of length } k \\ \text{otherwise} \end{cases}$	$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \exists \text{ circuit } (x_i, \cdots x_i) \text{ of length } k \\ \text{otherwise} \end{cases}$	$a_{ii}^{(k)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

8	∃ perfect matching	∃ partial graph (X, Γ'), B ; $\lvert B \rvert = n$, $\lvert b_i \rvert = \lvert b^j \rvert = 1 \quad (i, j = 1, 2, \cdots n)$
9	∃ Hamiltonian path	$\exists \sigma$; $a_{i\,i+1}(\sigma) = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots n-1)$
10	∃ Hamiltonian circuit	$\exists \sigma$; $a_{i\,i+1}(\sigma) = 1 \ (i = 1, 2, \cdots n-1)$, $a_{n1}(\sigma) = 1$
11	∃ arboresence with root x_i	$\sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} = I$
12	connected component p	$\exists \sigma$; $A(\sigma) = \left.\begin{bmatrix} E & & \\ & \ddots & \\ & & E \end{bmatrix}\right\} p$
13	cyclomatic number $\nu(G)$	$\nu(G) = \lvert A \rvert - n + p$
14	chromatic number p	$\exists C^*(\sigma)$; $\sigma_{ii}^*(\sigma) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots n)$

（表 1）

(ii) X の部分集合 S に関するもの。

	set $S \subset X$	incidence matrix A
15	internally stable	$A Y_1 = Y_4$
16	externally stable	$A Y_3 = Y_5$
17	kernel	$A Y_1 = Y_2$
18	base	$A^\circ Y_1 = Y_2$
19	support	$A Y_2 = Y_1$

（表 2）

ここに $Y_1, Y_2, \cdots Y_5$ は n 次ベクトルで 次の条件をみたすものとする。$*$は 1 又は 0 で任意。

	at J_S	at $J_S^c(=J_{X-S})$
Y_1	1	0
Y_2	0	1
Y_3	1	*
Y_4	0	*
Y_5	*	1

（表 3）

§2. Hamiltonian circuit の存在について。

[Lemma 1] ある整数 p と k（$1 < k+p \leq n$）があって $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$, …… $A^{(k+p-1)}$ は

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = I \qquad \cdots (3)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} A^{(k+i)} = E \qquad \cdots (4)$$

をみたす p 個のベクトル a_0, a_1, …… a_{p-1} より成るならば

$$\begin{aligned} A^{(k+pi)} &= A^{(k)} \\ A^{(k+1+pi)} &= A^{(k+1)} \qquad i=1,2,\cdots \qquad \cdots (5) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^{(k+p-1+pi)} &= A^{(k+p-1)} \end{aligned}$$

である。すなわち

$$\sum_{n=0}^{p-1} A^{(k+pi+n)} = E \qquad i=1,2,\cdots \qquad \cdots (6)$$

である。

[Theorem 1] グラフ $G(X, \Gamma)$, $|X|=n$ が 次の条件(i)(ii)をみたすならば Hamiltonian circuit をもつ。

(i) $\forall S \subset X$ に対し

$$|\Gamma S| \geq |S|. \qquad \cdots (7)$$

(ii) ある整数 p と k $(1 < p+k \leq n)$ があって $A^{(k)}, A^{(k+1)}, \cdots\cdots A^{(k+p-1)}$ は

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = I \qquad \cdots (8)$$

$$|a_i| = \frac{n}{p} \quad (i=0, 1, \cdots p-1) \qquad \cdots (9)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} A^{(k+i)} = E \qquad \cdots (10)$$

をみたすベクトル $a_0, a_1, \cdots\cdots a_{p-1}$ より成る。ただし p は n の約数とする。

[Theorem 2] グラフ $G(X, \Gamma)$, $|X|=2n$ が Hamiltonian circuit をもつための必要十分条件は 次の(i)〜(iii)をみたすことである。

(i) $\exists \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$ (2n次ベクトル);

$$A\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 \qquad \cdots (11)$$

$$A\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_4 \qquad \cdots (12)$$

$$|\mathbb{Z}_1| = n \qquad \cdots (13)$$

$$\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 = \mathbb{I} \qquad \cdots (14)$$

$$\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_3 = \mathbb{I} \qquad \cdots (15)$$

$$\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 = \mathbf{I} \qquad \cdots (16)$$

$$\mathbf{Z}_1' \cdot \mathbf{Z}_3 = 0 \quad (\text{スカラー}) \qquad \cdots (17)$$

(ii) $\forall S \subset X$ に対し

$$|S \cap X_1| \leq |\nabla S \cap X_2| \qquad \cdots (18)$$

$$|S \cap X_2| \leq |\nabla S \cap X_1| \qquad \cdots (19)$$

ただし X_1は$\mathbf{Z}_1$の0に対応するXの点, X_2は$\mathbf{Z}_1$で1に対応するXの点。

(iii) (i)(ii)より 存在の保障される2組のmatchingを

$$(x_1, x_{i1}), (x_2, x_{i2}), \cdots\cdots (x_n, x_{i_n}) \qquad \cdots (20)$$

$$(x_{i1}, x_{j1}), (x_{i2}, x_{j2}), \cdots (x_{i_n}, x_{j_n}) \qquad \cdots (21)$$

とするとき $(j_1, j_2, \cdots j_n)$は$(1, 2, \cdots n)$の巡回置換となる。

§3. チェスのナイトの旅に関するEuler問題の解の存在の証明。

Euler問題というのは チェス盤上のナイトを1つのます目を1回そして唯一回通るように動かすことができるかいなかということである。この問題に対し 実際に解をみつける手順はいくつかみつけられているが、それらの理論的根拠がなかった。(cf. [1]) ここでは すでに述べた[定理1], [定理2]を使って、Euler問題が解をもつことを証明する。

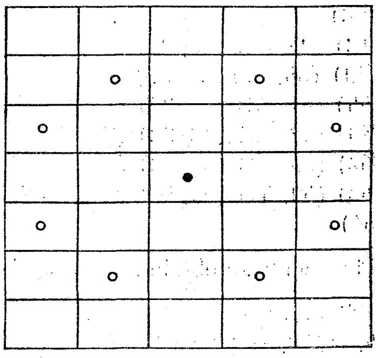
チェス盤に 図1の如く 1から64まで番号をつける。$X=\{1, 2, \cdots\cdots 64\}$とし、$\Gamma x$ を各$x \in X$に対し 1 stepでいける番号とする。(cf. 図2) すなわち

$$\Gamma(1)=[11,\ 18]$$
$$\Gamma(2)=[12,\ 17,\ 19] \qquad \cdots\cdots(22)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と定義する。このとき Euler問題の解の存在は このグラフ $G(X,\Gamma)$の Hamiltonian circuit の存在と同値である。

1	9	17	25	33	41	49	57
2	10	18	26	34	42	50	58
3	11	19	27	35	43	51	59
4	12	20	28	36	44	52	60
5	13	21	29	37	45	53	61
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63
8	16	24	32	40	48	56	64

(図1)



(図2)

(i) [定理1]による解の存在の証明

グラフ $G(X,\Gamma)$に対応する連結行列をAとする。このとき $k=5,\ p=2$で

$$a_0=(0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0$$
$$1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \quad \cdots(23)$$
$$1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0)$$

$$a_1 = I - a_0 \qquad \cdots (24)$$

である。すなわち

$$A^{(5)} + A^{(6)} = E \qquad \cdots (25)$$

で $A^{(5)}$において a_0より成る行ベクトルの番号は

2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 34, 36, 38, 40,
41, 43, 45, 47, 50, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 63 $\cdots (26)$

a_1より成る行ベクトルの番号は

1, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 33,
35, 37, 39, 42, 44, 46, 48, 49, 51, 53, 55, 58, 60, 62, 64 $\cdots (27)$

また(26)と(27)との間には次のようなmatchingがある。

(1, 11) (2, 19) (3, 9) (4, 14) (5, 15) (6, 12) (7, 13)
(8, 23) (9, 26) (10, 4) (11, 17) (12, 2) (13, 3) (14, 8)
(15, 32) (16, 6) (17, 27) (18, 1) (19, 25) (20, 5) (21, 31)
(22, 28) (23, 29) (24, 7) (25, 10) (26, 20) (27, 21) (28, 18) $\cdots (28)$
(29, 35) (30, 21) (31, 16) (32, 22) (33, 43) (34, 49) (35, 41)
(36, 30) (37, 47) (38, 44) (39, 45) (40, 55) (41, 58) (42, 36)
(43, 37) (44, 34) (45, 60) (46, 40) (47, 64) (48, 38) (49, 59)
(50, 33) (51, 42) (58, 52) (59, 53) (60, 50) (61, 51)
(62, 56) (63, 46) (64, 54)

したがって求めるHamiltonian circuit $\mathcal{U}$は

$$\mu = [1, 11, 17, 27, 21, 31, 16, 6, 12, 2, 19, 25, 10, 4, 14, 8, 23, 29, 35, 41, 58, 52, 62, 56, 39, 45, 60, 50, 33, 43, 37, 47, 64, 54, 48, 38, 44, 34, 49, 59, 53, 63, 46, 40, 55, 61, 51, 57, 42, 36, 30, 24, 7, 13, 3, 9, 26, 20, 5, 15, 32, 22, 28, 18] \quad \cdots (29)$$

(ii) [定理2]による解の存在の証明

$$Z_1 = Z_4 = a_0$$
$$Z_2 = Z_3 = a_1 \quad \cdots (30)$$

となる。(あとは略)

REFERENCES

[1] C. Berge, (1962), "The Theory of Graphs and its Applications," English translation by Alison Doig, Methuen, London, and Wiley, New York.

[2] Y. Takenaka, (1968), On the existence of a Hamiltonian path in a graph, Inform. Contr. 13, No. 6, 555–564

[3] Y. Takenaka, (1970), Graph theoretic concepts and the incidence matrix, Inform. Contr. 17, No. 2, 113–121